СТРУКТУРА ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ПРИ СЕРФОТРОННОМ УСКОРЕНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ПАКЕТОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Николай Ерохин¹, Людмила Михайловская¹, Надежда Зольникова¹, Румен Шкевов²

¹ Институт космических исследований – Российская академия наук ² Институт космических исследований и технологий – Болгарская академия наук e-mail: nerokhin@mx.iki.rssi.ru, shkevov@space.bas.bg

Ключевые слова: Космическая плазма, электромагнитные волны, серфотронное ускорение, фазовая плоскость, нелинейное уравнение, захват частиц, волновой пакет, релятивистский импульс

Абстракт: На основе численного анализа исследована структура фазовой плоскости при серфотронном ускорении слаборелятивистских электронов пространственно локализованным пакетом электромагнитных волн с лоренцовской огибающей амплитуды в космической плазме. Исследован захват частиц волновым пакетом в режим ультрарелятивистского серфотронного ускорения с увеличением энергии зарядов на три порядка величины и более используя нелинейное уравнение для фазы пакета на несущей частоте в месте нахождения ускоряемой частицы. Для слаборелятивистских зарядов захват частиц в режим серфинга возможен и при невыполнении условия черенковского резонанса на начальном этапе их взаимодействия с пакетом. Изучена временная динамика процессов захвата и последующего ультрарелятивистского ускорения частиц с учетом их циклотронного вращения, рассмотрена структура фазовой плоскости исследуемого нелинейного уравнения. Показано, что для захваченной частицы фазовая плоскость имеет особую точку типа устойчивый фокус. При сильном ускорении наблюдается существенная локализация траекторий на фазовой плоскости в окрестности фокуса (конденсация ускоряемых зарядов на дно эффективной потенциальной ямы). Изучена временная, динамика компонент импульса захваченных электронов. Формулируются оптимальные условия для реализации максимального ультрарелятивистского серфотронного ускорения частиц пространственно локализованным волновым пакетом в космической плазме.

ON THE PHASE PLANE STRUCTURE FOR SURFATRON ACCELERATION OF ELECTRONS BY THE WAVE PACKET IN SPACE PLASMAS

Nikolay Erokhin¹, Ludmila Mikhailovskaya¹, Nadezhda Zolnikova¹, Rumen Skevov²

¹Space Research Institute – Russian Academy of Sciences
²Space Research and Technology Institute – Bulgarian Academy of Sciences e-mail: nerokhin@mx.iki.rssi.ru, shkevov@space.bas.bg

Key words: Space plasma, electromagnetic waves, surfatron acceleration of electrons, phase plane, nonlinear equation, trapping of particles, relativistic impulse

Abstract. By numerical analysis it is investigated the phase plane structure for surfatron acceleration of weakly relativistic electrons in space plasmas by the electromagnetic waves packet having the Lorentz envelope of its amplitude. It is studied the particles capture by wave packet to the highly relativistic acceleration regime with their energy growth by thousand times and more on the usage of nonlinear equation for the wave packet phase at its central frequency on charge trajectory. In the case of weakly relativistic particles their trapping by wave packet is occurred even in situation when initially the condition of Cherenkov resonance isn't fulfilled. The temporal dynamics both of particles capture by wave packet and their following highly relativistic acceleration is studied taking into account the charge cyclotron rotation at initial times. The structure of phase plane for nonlinear equation considered is investigated. It has been shown that for trapped particles the phase plane has a special point like the stable focus. For the strong charges acceleration it is observed the significant localization of trajectories on phase plane near this point (the particles condensation to the bottom of effective potential). The temporal dynamics of trapped electrons impulse components has been studied. The optimal conditions to realize the maximum of electrons surfatron acceleration by the spatially localized wave packet in space plasmas are formulated.

Введение

Исследование механизмов формирования потоков ультрарелятивистских частиц в космической плазме входит в число актуальных задач астрофизики и, в частности, оно представляет интерес для проблемы генерации космических лучей. При этом одним из главных механизмов формирования потоков ультрарелятивистских частиц является серфинг зарядов на электромагнитных волнах (см., например, работы [1-16]). Соответственно для оценок возможного количества ускоренных частиц, их максимальной энергии, энергетических спектров необходим детальный анализ оптимальных условий для захвата заряженных частиц волновым пакетом в эффективную потенциальную яму с последующим ультрарелятивистским ускорением, а также эффективности ускорения в зависимости от исходных параметров задачи.

В настоящем докладе изложены результаты численных расчетов захвата слаборелятивистских зарядов и их последующего сильного серфотронного ускорения в магнитоактивной космической плазме при черенковском резонансе с пространственно локализованным пакетом электромагнитных волн, имеющим достаточно плавную лоренцовскую огибающую амплитуды. С учетом интегралов движения релятивистских уравнений для заряженных частиц задача сведена к исследованию нестационарного, нелинейного уравнения второго порядка диссипативного типа для фазы пакета (на несущей частоте) на траектории частицы. Полагается что волновой пакет распространяется поперек достаточно слабого внешнего магнитного поля с максимальной амплитудой электрического поля выше некоторого порогового значения, что обеспечивает реализацию серфотронного механизма ускорения частиц. Отметим, что данный механизм работает и при наклонном (к внешнему магнитному полю) распространении волнового пакета.

Проведенные ранее численные расчеты показали, что имеется достаточно широкий диапазон благоприятных для реализации серфинга начальных фаз волнового пакета на несущей частоте, в котором при возникновении черенковского резонанса волна-частица имеют место захват и последующее ультрарелятивистское ускорение зарядов. При этом набор энергии захваченной частицей возрастает с увеличением характерной толщины области волнового пакета, в которой электрическое поле пакета волн выше порогового значения. Соответственно этому для ультрарелятивистского ускорения электронов, начальная кинетическая энергия которых была порядка $m_e c^2$, в расчетах полагается выполненным условие достаточно плавного изменения амплитуды волнового пакета в пространстве т.е. введенный ниже безразмерный параметр характерной толщины волнового пакета ρ считается достаточно большим $\rho > 10^4$, что вполне реалистично, например, для солнечной гелиосферы.

Для захваченных волновым пакетом частиц исследуется структура фазовой плоскости для нелинейного уравнения, в частности, при ультрарелятивистском ускорении возникновение на ней особой точки типа устойчивого фокуса. Численные расчеты показывают, что при достаточно сильном ускорении зарядов на фазовой плоскости траектория изображающей точки по спирали приближается к устойчивому фокусу. Физически это соответствует конденсации сгустка ускоряемых частиц на дно эффективной потенциальной ямы. После пересечения волнового пакета эти траектории раскручиваются удаляясь от фокуса. После вылета из эффективной потенциальной ямы амплитуда электрического поля волнового пакета становится ниже порогового для серфинга значения и наблюдается циклотронное вращение частиц во внешнем магнитном поле.

Кроме того численно исследована динамика компонент импульса и скорости ускоряемых заряженных частиц, их траектории с учетом гировращения во внешнем магнитном поле до захвата зарядов волной и после вылета из эффективной потенциальной ямы, а также зависимость эффективности ускорения от исходных параметров задачи, в частности, от фазовой скорости волны. Здесь следует отметить, что для начальной кинетической энергии электронов порядка m_e c² период их циклотронного вращения мал по сравнению с характерным временем ускорения. Поэтому разброс по энергии ускоренных частиц для разных начальных данных, но при неизменных параметрах волнового пакета оказывается сравнительно невелик.

Поскольку при обработке данных наблюдений потоков ультрарелятивистских зарядов в космическом пространстве был выявлен зависящий от космической погоды избыток числа частиц в некотором диапазоне их энергий (в солнечной гелиосфере это энергии порядка десятков-сотен Гэв) обсуждается вопрос о возможных причинах отклонения наблюдаемого спектра космических лучей от стандартного степенного закона. Из результатов выполненных численных расчетов также следует, что оптимальным условием существенного повышения максимальной энергии при серфотронном ускорении заряженных частиц является близость фазовой и групповой скоростей на несущей частоте пакета, а также согласование знаков поперечных к внешнему магнитному полю компонент импульса частиц. В противном случае

частица оставаясь захваченной передает энергию волне и меняет соотношение знаков поперечных компонент импульса.

Проведенный анализ серфотронного механизма ускорения представляет интерес для интерпретации экспериментальных данных по регистрации потоков релятивистских частиц в космических условиях включая гелиосферу, а также важен для объяснения наблюдаемых в эксперименте особенностей в спектрах космических лучей.

Основные уравнения и результаты численных расчетов

Рассмотрим ускорение слаборелятивистских электронов электромагнитной волной рполяризации с плавной лоренцовской огибающей ее амплитуды, распространяющейся вдоль оси х в магнитоактивной плазме поперек внешнего магнитного поля H_0 , которое параллельно оси z. Частота волны соответствует верхнему гибридному резонансу. Соответственно полагаем, что фазовая скорость ω / ck_x меньше скорости света в вакууме и возможен черенковский резонанс волны с ускоряемыми частицами, что необходимо для реализации серфотронного ускорения. Согласно проведенным ранее расчетам для используемых в численном моделировании значений параметров задачи электрическое поле волны можно считать электростатическим т.е. $E_x(x,t) = A \cos \Psi$, где $\Psi = \omega_0 t - k_0 x$, ω_0 несущая частота пакета, $k_0 = k(\omega_0)$, а функция A(x,t) определяет плавную лоренцовскую огибающую амплитуды. Введем безразмерные переменные и параметры: $\beta = v / c$ - скорость электрона, $\sigma = e E_0 / m c \omega_0$ безразмерная амплитуда волнового пакета, $\tau = \omega_0 t$, $\xi = k_0 x$, $\gamma = 1 / (1 - \beta^2)^{1/2}$ - релятивистский фактор частицы, $u = \omega_{He} / \omega_0$, $\omega_{He} = e H_0 / mc$ нерелятивистская циклотронная частота электронов, E_0 - амплитуда электрического поля в центре волнового пакета, $\mu = e A / m c \omega$. Заметим, что $\beta_x = \beta_p [1 - (d\Psi/d\tau)]$, $\beta_p = \omega_0 / ck_0$, а импульс электрона равен $p = m c \gamma \beta$.

С точки зрения пренебрежения нелинейными эффектами для ускоряющих волн будем полагать, что их амплитуды существенно ниже характерного поля релятивистской нелинейности т.е. выполнено условие $\sigma = e E_0 / m c \omega_0 \ll 1$. Захват частиц в режим серфотронного ускорения происходит в случае $\sigma > \sigma_c = u \gamma_p = u / (1 - \beta_p^2)^{1/2}$ т.е. при амплитудах волны выше порогового для серфинга значения. Имеем связь d $\Psi / d \tau = 1 - (\beta_x / \beta_p)$, N = c k / ω показатель преломления плазмы и соответственно $\beta_p = 1 / N$.

Запишем релятивистские уравнения движения для импульса ускоряемого электрона

d (
$$\gamma \beta_x$$
) / d τ = - $\Lambda \cos \Psi$ - u β_y

(1)
$$\gamma \beta_z = \text{const} \equiv h$$

d ($\gamma \beta_y$) / d τ = u β_x

d γ / d τ = - Λ β_x cos Ψ

где Λ = σ / [1 + { (τ - Ψ) / ρ }²] лоренцовская огибающая амплитуды волнового пакета, параметр ρ в данной задаче считается достаточно большим для реализации ультрарелятивистского ускорения захваченных частиц $\rho = \omega_0 \ L$ / $c \sim (10^4 \div 10^6)$, здесь 2L характерная толщина волнового пакета. Используя (1) находим интеграл движения для ускоряемого электрона J = $\gamma \beta_y$ + u β_p (Ψ - τ) = const. С учетом выражения для интеграла J получаем формулы для релятивистского фактора γ и компоненты скорости заряда (2) вдоль волнового фронта β_v :

(2)
$$\gamma = \{ 1 + h^2 + [J + u \beta_p (\tau - \Psi)]^2 \}^{1/2} / (1 - \beta_x^2)^{1/2}, \beta_y = [J + u \beta_p (\tau - \Psi)] / \gamma$$

Анализ ускорения зарядов с учетом лоренцовской огибающей амплитуды проводится на основе вытекающего из (1) нелинейного нестационарного уравнения для фазы волны Ψ на траектории электрона

(3)
$$d^2 \Psi / d\tau^2 - [\Lambda (1 - \beta_x^2) / \gamma \beta_p] \cos \Psi - (u \beta_y / \gamma \beta_p) = 0.$$

Начальные данные для решения уравнения (3) берем в следующем виде Ψ (0) = Ψ_0 , $\Psi_{\tau}(0)$ = a, причем 1 – N < a < 1 + N. Соответственно имеем $\beta_x(0) = \beta_p$ (1 – a). Введем компоненты безразмерного импульса частицы $g_x = \gamma \beta_x$, $g_y = \gamma \beta_y$. Отметим, что условие $\sigma = \sigma_C$

определяет область, в которой происходит захват заряженной частицы в режим серфотронного ускорения.

Нелинейное уравнение (3) решалось численно с указанными выше начальными данными. Для достаточно больших времен ускорения, когда энергия частиц возрастает на порядки величин, численное решение должно выходить на следующие асимптотики для компонент скорости и релятивистского фактора заряда $\gamma(\tau) \approx u \beta_p \gamma_p \tau$, $\beta_x(\tau) \approx \beta_p$, $\beta_y \approx -1 / \gamma_p$, $\beta_z \rightarrow 0$. Заметим, что для электронов в асимптотике знаки поперечных компонент скорости различные $\beta_x \beta_y < 0$. Однако для позитронов они будут одного знака $\beta_x \beta_y > 0$.

Для нахождения диапазонов начальных фаз $\Psi(0)$, при которых происходит захват заряда в режим серфотронного ускорения волной, фиксировалась фазовая скорость волны $\beta_{\rm p}$ из интервала (0, 1). Амплитуда волны σ выбиралась несколько выше порогового значения $\sigma_{\rm c}$, а именно $\sigma = 1.51 \sigma_{\rm c}$. Затем численными расчетами на относительно малых временах $\tau \sim 20000$ определялся диапазон начальных фаз, в котором имел место захват заряда в режим серфотронного ускорения волновым пакетом. При выборе параметра $\rho = 5 \cdot 10^4$ интервал счета брался равным (0, $9 \cdot 10^4$) поскольку вылет захваченной частицы из области, где поле волны было выше порогового для серфинга значения, происходил на временах τ порядка $8 \cdot 10^4$.

Рассмотрим результаты расчетов для следующего варианта выбора параметров задачи h = 0.37, gy(0) = 0.93, β_p = 0.71, u = 0.21, σ = 1.51 σ_c , ρ = 5·10⁴, a = 0.1 соответствующего слаборелятивистским начальным энергиям заряженной частицы $\gamma(0)$ = 2.009. В таблице 1 представлен ряд значений начальных фаз $\delta\Psi(0)$ и соответствующих им значений времени τ_c , при которых происходит захват частицы пакетом в режим серфотронного ускорения. Начальное положение частицы соответствовало левой границе области, в которой поле волны выше порогового значения. Заметим, что в начальный момент времени имеется малая отстройка частицы от черенковского резонанса. После захвата частица с фазовой скоростью β_p пересекает волновой пакет, движущийся с весьма малой групповой скоростью. Левая граница области захвата Ψ_L оценивается по формуле $\Psi_L = \{ [\sigma / \sigma_c) - 1] / \rho \}^{1/2}$. С учетом значений исходных параметров полагалось $\Psi(0) = \phi + \delta\Psi(0), |\delta\Psi(0)| < 2 \cdot \pi, \tau_0 = 90000, \phi = 2\pi \cdot 5400$.

Таблица 1.

δΨ ₀	-4.467	- 4.1	- 4.0	- 3.5	- 3.0	- 2.5	- 2.0	- 1.5	- 1
τ _c	0	0	0	0	> τ ₀				

Таблица 1а.

δΨο	- 0.5	0	0.5	1	1.5	2	3	3.5	4
τ _c	> τ ₀	> τ ₀	> τ ₀	> τ ₀	623.75	0	> τ ₀	13124	> τ ₀

Как видно из таблиц 1 и 1а, зоны значений $\delta \Psi(0)$, соответствующих захваченным и пролетным частицам чередуются, что свидетельствует о сложной структуре нестационарного эффективного потенциала для нелинейного осциллятора $\Psi(\tau)$. При отсутствии захвата частицы волновым пакетом $\Psi(\tau)$ имея малые вариации в среднем возрастает пропорционально времени, а частица испытывает циклотронное вращение в левой части пакета. Рассмотрим подробнее расчеты для варианта выбора фазы $\delta \Psi(0) = 3.5$. При это захват заряда имеет место на временах $\tau_c = 13214$, а вылет после пересечения пакета при $\tau_d = 84335$. После захвата частицы пакетом наблюдаются вариации фазы в окрестности дна эффективной потенциальной ямы. Частица колеблется в области ускоряющих значений электрического поля волны. Причем среднее значение фазы по мере смещения заряда вдоль волнового пакета меняется в соответствии с амплитудой огибающей так, что средний темп ускорения частицы сохраняется. Начальное положение заряда соответствовало $\xi(0) = -2.409 \cdot 10^4$.

До захвата частицы пакетом заряд совершал циклотронное вращение как это видно из графиков на рис. 2 и рис. 3, здесь $\eta(\tau)$ смещение частицы вдоль волнового фронта (ось у).



Рис. 1. Динамика фазы волнового пакета на траектории частицы.

Заметим, что согласно рис. 2 и рис. 3 для незахваченной частицы траектория на плоскости (ξ, η), перпендикулярной внешнему магнитному полю, существенно отличается от окружности. Видны значительные изменения амплитуды колебаний ξ, η.



Рис. 3. Смещение частицы вдоль волнового фронта по оси у.

Это означает, что имеются существенные локальные изменения энергии незахваченной





Рис. 4. Локальные изменения энергии незахваченной частицы.

Приведем график релятивистского фактора частицы для интервала времени τ до 90000. На рис. 5 показан график γ(τ) и его аналитической аппроксимации М(τ). Рис. 5 свидетельствует о том, что рост энергии частицы соответствует постоянному темпу ускорения пакетом.



Рис. 5. График γ(τ) и его аналитической аппроксимации М(τ).

Временная динамика ускорения заряда определяется функцией соз $\Psi(\tau)$. Согласно расчетам захваченная частица находится в области ускоряющих полей, причем в центре волнового пакета, где амплитуда поля максимальна значение функции соз $\Psi(\tau)$ меньше.

Структура фазовой плоскости нелинейного осциллятора $\Psi(\tau)$ дана на рис. 6 для интервала времени $2\cdot10^4 < \tau < 6.9\cdot10^4$. Изображающая точка вращаясь по часовой стрелке движется справа налево к особой точке типа устойчивый фокус. В частности, для интервала $3\cdot10^4 < \tau < 7.02\cdot10^4$ структура фазовой плоскости такова. По мере приближения к моменту вылета частицы из эффективной потенциальной ямы траектория изображающей точки смещается направо, наблюдаются весьма малые значения производной фазы, что обусловлено большим ростом массы частицы при ультрарелятивистском ускорении ее волновым пакетом.

Отметим динамику поперечных компонент импульса частицы при серфотронном ускорении для интервала времени, когда частица еще не была захвачена пакетом. Они соответствуют циклотронному Динамика продольной (к внешнему магнитному полю) компоненты скорости заряда такова : по мере ускорения частицы продольная компонента значительно уменьшается в виду сохранения продольного импульса, однако наблюдаются и значительные вариации β_z . Наконец отметим, что структура траектории заряда на поперечной плоскости существенно отличается от ларморовской окружности.вращению с заметными вариациями энергии заряда.



Рис. 6. Фазовая плоскость нелинейного осциллятора $\Psi(\tau)$.

Заключение

В работе изложены результаты численных расчетов динамики захвата и последующего ультрарелятивистского серфотронного ускорения электронов в магнитоактивной плазме при их взаимодействии с пространственно локализованным волновым пакетом, имеющим лоренцовскую огибающую амплитуды электрического поля. Полагая число ускоренных электронов малым и пренебрегая затуханием электромагнитных волн задача сведена к анализу нестационарного, нелинейного уравнения второго порядка диссипативного типа для фазы пакета на несущей частоте в месте нахождения частицы. Волновой пакет распространяется поперек внешнего магнитного поля.

Изучена временная динамика характеристик ускоряемых частиц включая их захват и последующее длительное удержание в области ускоряющих напряженностей электрического поля волнового пакета. Показано, что при неблагоприятных условиях, соответствующих отстройке частицы от черенковского резонанса с волной, неблагоприятной начальной фазе пакета на несущей частоте для слаборелятивистских частиц их захват в режим серфинга на интервале времени численных расчетов может быть широкого диапазона начальных условий по прошествии некоторого времени. Поскольку начальный циклотронный период частицы во внешнем магнитном поле относительно мал заряд совершив ряд гирооборотов попадает в благоприятную для захвата волной фазу при одновременном выполнении черпенковского резонанса. После захвата происходит ультрарелятивистское ускорение частиц с ростом их энергии на 3+4 порядка величины и более, если время захвата не слишком велико. Следовательно, число ускоренных волновым пакетом частиц может быть достаточно большим вследствие увеличения в пространстве начальных импульсов области, из которой заряды попадают в режим эффективного серфотронного ускорения. Показано, что во время сильного ускорения компоненты импульса и релятивистский фактор захваченной частицы возрастают практически с постоянным темпом. При отсутствии захвата происходит циклотронное вращение частиц и тем не менее в этом процессе возможно доускорение частиц с увеличение их энергии, например, на порядок.

Рассмотрена структура фазовой плоскости для нелинейного уравнения, описывающего сервотронное ускорение зарядов. Показано, что на фазовой плоскости изображающая точка движется по сжимающейся траектории вокруг особой точки типа устойчивого фокуса. При этом период колебаний частицы в эффективной потенциальной яме возрастает, амплитуда осцилляций снижается.

Согласно проведенным расчетам для реализации оптимального серфинга зарядов с ультрарелятивистским ускорением необходимо выполнить следующие условия : а) для захвата частицы волной ее амплитуда должна быть выше порогового значения; б) должен реализоваться черенковский резонанс волна-частица; в) фаза волны на траектории заряда

должна быть благоприятной для захвата частиц; г) знаки поперечных к внешнему магнитному полю компонент импульса заряда должны быть согласованы.

Зависимость эффективности ускорения частиц от величины фазовой скорости волны такова. При выборе релятивистских значений фазовой скорости волны наибольшее ускорение идет по направлению распространения волны, темп ускорения частиц наибольший, а при заданной толщине пакета энергия ускоренных электронов максимальна. В обратном случае – низких значений фазовой скорости основное ускорение происходит вдоль волнового фронта, а темп ускорения значительно снижается, например, на порядок. При заданной полуширине волнового пакета это означает существенное уменьшение максимальной энергии ускоренных электронов.

Проведенный численный анализ серфинга релятивистских зарядов на электромагнитных волнах представляет интерес для физики космической плазмы (см., например, [10-15]), в частности, для интерпретации экспериментальных данных по регистрации потоков релятивистских частиц в космических условиях включая околоземное пространство. Кроме того, как уже указывалось ранее одним из возможных механизмов генерации космических лучей является серфинг заряженных частиц на электромагнитных волнах.

Необходимо отметить, что генерация потоков ультрарелятивистских заряженных частиц в космической плазме характеризуется большой (в масштабе периода волны) длительностью взаимодействия и соответственно получаются весьма высокие энергии ускоренных частиц. В частности, в солнечной гелиосфере характерные энергии при серфотронном ускорении зарядов могут достигать десятков-сотен ГэВ [11]. Благодаря серфингу зарядов на электромагнитных волнах в относительно спокойных условиях в космической плазме возможна генерация потоков ультрарелятивистских заряженных частиц в окрестности сравнительно спокойных звезд и возникновение особенностей в их энергетических спектрах, связанных с существенным отклонением от стандартных степенных зависимостей [11].

Литература:

- 1. Katsouleas, N., Dawson J.M. Physical Review Letters, 1983, v.51, ¹5, p.392.
- 2. Joshi, C. Radiation in plasmas, 1984, v.1, No 4, pp.514.
- 3. Грибов, Б.Э., Р.З. Сагдеев, В.Д. Шапиро, В.И. Шевченко. Письмав ЖЭТФ, 1985, т.42, вып.2, с.54.
- 4. Буланов, С.В., А.С.Сахаров. Письмав ЖЭТФ, 1986, т.44, вып.9, с.421.
- 5. Ситнов, М.И. Письма в ЖТФ, 1988, т.14, вып.1, с.89.
- 6. Ерохин, Н.С., А.А.Лазарев, С.С.Моисеев, Р.З.Сагдеев.ДАН СССР, 1987, т.295, № 4, с.849.
- 7. Ерохин, Н.С., С.С. Моисеев, Р.З. Сагдеев. Письма в Астрономический журнал, 1989, т.15, № 1,с.3.
- 8. Ерохин, Н.С., Н.Н.Зольникова, А.Г.Хачатрян. Физика плазмы, 1990, т.16, вып.8, с.945.
- 9. Кичигин, Г.Н. ЖЭТФ, 1995, т.108, вып.10, с.1342.
- 10. Кичигин, Г.Н. ЖЭТФ, 2001, т.119, вып.6, с.1038.
- 11. Лозников, В.М., Н.С.Ерохин. Вопросы атомной науки и техники, сер.Плазменная электроника, 2010, № 4 (68), с.121.
- 12. Ерохин, Н.С., Н.Н.Зольникова, Е.Кузнецов, Л.А. Михайловская. Вопросы атомной науки и техники, сер.Плазменная электроника, 2010, № 4 (68), с.116.
- 13. Dieckmann, M.E., P.K.ShukI. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2006, v.48, Issue 10, p.1515.
- 14. Wang De-Yu., Lu Quan-Ming. Advances in Space Research, 2007, v.39, Issue 9, p.1471.
- 15. Нейштадт, А.И., А.В.Артемьев, Л.М.Зеленый, Д.Л.Вайнштейн. Письма в ЖЭТФ, 2009, т.89, вып.9, с.528.
- 16. Kichigin, G.N., N.A. Strokin. Geomagnetism and Aeronomy, 2007, v.47, No.6, p.704.